TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

3. KK 3. TM 4. K+F

Optimalizálási feladatok a termelés tervezésében és irányításában

Oktatási segédlet

2012

Dr. Kulcsár Gyula

egyetemi docens

Miskolci Egyetem, Alkalmazott Informatikai Tanszék

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Tartalomjegyzék

- Hozzárendelési feladat megoldása Magyar-módszerrel
- Szállítási feladat megoldása
- Projektütemezési feladat megoldása
- Termelésütemezési feladatok modellezése és megoldása

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A Hozzárendelési feladat megoldása Magyar-módszerrel

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A Hozzárendelési feladat

- Adott meghatározott számú gép és ugyanannyi független munka.
- Bármelyik gép bármelyik munkát képes elvégezni.
- Ismertek a gépek adott munkákra vonatkozó költségei.
- A feladat az, hogy minden géphez rendeljünk pontosan egy munkát úgy, hogy minden munka el legyen végezve és az összköltség minimális legyen.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A Hozzárendelési feladat matematikai modellje

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow min$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} (i = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 (j = 1,2,\ldots,n)$$

- Jelölések:

  n – gépek (munkák) száma

  i – gép index

  j – munka index

  c_{ij} – az i. gép által végzett j. munka költsége

  x_{ij} – döntési változó

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Példa n = 5

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	3	2	3
G2	3	2	4	3	4
G3	3	3	4	4	3
G4	2	4	3	2	4
G5	2	1	3	4	3

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A példa megoldása

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	*3*	2	3
G2	3	*2*	4	3	4
G3	3	3	4	4	*3*
G4	2	4	3	*2*	4
G5	*2*	1	3	4	3

x_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	0	0	1	0	0
G2	0	1	0	0	0
G3	0	0	0	0	1
G4	0	0	0	1	0
G5	1	0	0	0	0

$$3 + 2 + 3 + 2 + 2 = 12$$

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A megoldás menete

I. A költség mátrix szisztematikus átalakítása Magyar-módszerrel, független nulla rendszer kiválasztása.

II. A redukált költség mátrix független nulla rendszere alapján a döntési változók értékének beállítása.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A Magyar-módszer váza

Előkészítő rész

- 0. független nulla-rendszer képzése

Iterációs rész:

- 1. vizsgálat, oszloplekötés
- 2. szabad 0 keresése
- 3. vesszőzés, sorlekötés, oszlopfeloldás
- 4. láncképzés, átalakítás
- 5. redukálás

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

0. Előkészítés

- Minden sorból vonjuk ki az adott sor legkisebb elemét.
- Minden oszlopból vonjuk ki az adott oszlop legkisebb elemét.
- Oszlopfolytonosan alakítsunk ki független nulla-rendszert. (Az oszlopindexek szerint haladjunk végig növekvő sorrendben, mindig a legkisebb sorindexű nullát vegyük fel a rendszerbe (0*)! Minden sorban és oszlopban legfeljebb egy nulla legyen kiválasztva!)

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

1. Vizsgálat, oszloplekötés

- Ha a független nulla-rendszer elemeinek száma n akkor készen vagyunk. A 0* elemek mutatják az eredményt.
- Egyébként, kössük le a 0*-okat tartalmazó oszlopokat (az oszlop felé tegyünk + jelet)!
- Folytassuk a 2. lépéssel!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

2. Szabad nulla keresése

- Keressünk sorfolytonosan szabad 0-át!

  (Szabad elem az, amelynek sem sora sem oszlopa nem kötött.)

  – Ha nincs akkor folytassuk az 5. lépéssel!

  – Ha van, akkor nézzük meg, hogy a sora tartalmaz-e 0*!

    - Ha tartalmaz akkor folytassuk a 3. lépéssel.

    - Egyébként folytassuk a 4. lépéssel!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

3. Vesszőzés, sorlekötés, oszlopfeloldás

- A vizsgált szabad 0-t jelöljük meg vesszővel (0’)!
- Kössük le a sorát (tegyünk + jelet a sor elé)!
- Oldjuk fel a sorában lévő 0* oszlopát!
- Folytassuk a 2. lépéssel!

4. Láncképzés, átalakítás

- A vizsgált szabad 0-t jelöljük vesszővel (0’)!
- Képezzünk láncot az új 0’-től indulva úgy, hogy a 0’-t az oszlopában lévő 0* követi, a 0*-t a sorában lévő 0’ követi, ha nincs megfelelő elem véget ér a lánc. A lánc elemeit jelöljük e-vel (0’e vagy 0*e).
- Készítsünk új mátrixok: az aktuálisból másoljuk át a számokat jelölések nélkül! Majd azokat az elemeket jelöljük *-gal amelyre igaz az hogy:
  - Láncban nem szereplő 0* elem volt (0*) vagy
  - Láncban szereplő 0’ elem volt (0’e) legutóbb.
- Folytassuk az 1. lépéssel!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

5. Redukálás

- Válasszuk ki a szabad elemek közül a legkisebbet (szemin)!
- Szemin-t vonjuk ki az összes szabad elemből!
- Szemint-t adjuk hozzá a kétszeresen kötött elemekhez! (Kétszeresen kötött elem: sora is és oszlopa is kötött.)
- Folytassuk a 2. lépéssel!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Példa

Kiindulási állapot:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	3	2	3
G2	3	2	4	3	4
G3	3	3	4	4	3
G4	2	4	3	2	4
G5	2	1	3	4	3

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

1.
0. Előkészítés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	3	2	3
G2	3	2	4	3	4
G3	3	3	4	4	3
G4	2	4	3	2	4
G5	2	1	3	4	3

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	1	0	1
G2	1	0	2	1	2
G3	0	0	1	1	0
G4	0	2	1	0	2
G5	1	0	2	3	2

Sorminimumok kivonása soronként.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

2.
0. Előkészítés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	1	0	1
G2	1	0	2	1	2
G3	0	0	1	1	0
G4	0	2	1	0	2
G5	1	0	2	3	2

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	0	0	1
G2	1	0	1	1	2
G3	0	0	0	1	0
G4	0	2	0	0	2
G5	1	0	1	3	2

Oszlopminimumok kivonása oszloponként.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

3.
0. Előkészítés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	0	0	1
G2	1	0	1	1	2
G3	0	0	0	1	0
G4	0	2	0	0	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	0
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

Független nulla-rendszer kijelölése oszlopfolytonosan.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

4.
1. lépés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	0
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1+	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	0
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Független nulla-rendszer kijelölése oszlop-folytonosan.
- Nincs teljes rendszer.
- 0* elemek oszlopainak lekötése.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

5.
2. lépés:

c_{ij}	M1+	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	0
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1+	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	***0***
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Van a sorában 0*.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

6.
3. lépés:

c_{ij}	M1+	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	***0***
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	***0'***
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- A talált szabad 0 megjelölése ‘-vel.
- 0’ sorának lekötése.
- 0' sorában lévő 0* oszlopának feloldása.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

7.
2. lépés:

c_{ij}	M1	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4	***0***	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Van a sorában 0*.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

8.
3. lépés:

c_{ij}	M1	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4	***0***	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2+	M3+	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	***0'***	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- A talált szabad 0 megjelölése ‘-vel.
- 0’ sorának lekötése.
- 0' sorában lévő 0* oszlopának feloldása.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

9.
2. lépés:

c_{ij}	M1	M2+	M3+	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2+	M3+	M4	M5
G1	2	3	0*	***0***	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Van a sorában 0*.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

10.
3. lépés:

c_{ij}	M1	M2+	M3+	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	3	0*	***0’***	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- A talált szabad 0 megjelölése ‘-vel.
- 0’ sorának lekötése.
- 0' sorában lévő 0* oszlopának feloldása.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

11.
2. lépés:

c_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	3	0*	0’	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	3	0*	0’	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Nincs.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

12.
5. lépés:

c_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	3	0*	0’	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2	0	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

- Szabad elemek minimumának kiválasztása: Szemin=c_{21}=1.
- Szemin kivonása a szabadelemekből.
- Szemin hozzáadása a kétszeresen lekötött elemekhez.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

13.
2. lépés:

c_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2	0	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

c_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2	***0***	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Van a sorában 0*.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

14.
3. lépés:

c_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2	0	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	***0'***	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

- A talált szabad 0 megjelölése ‘-vel.
- 0’ sorának lekötése.
- 0' sorában lévő 0* oszlopának feloldása.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

15.
2. lépés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	***0***	0	0	2	1

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Nincs a sorában 0*.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

16.
4. lépés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*e	1	0	1	0’e
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	***0’e***	0	0	2	1

- A talált szabad 0 megjelölése ’-vel.
- Innen indulva láncképzés.
- Minden 0'-t az oszlopában lévő 0* követ.
- Minden 0*-t a sorában lévő 0' követ.
- A lánc elemeit jelöljük e-vel.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

16. (folytatás)
4. lépés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*e	1	0	1	0’e
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	***0’e***	0	0	2	1

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	4	0*	0	1
G2	0	0*	0	0	1
G3	0	1	0	1	0*
G4	0	3	0	0*	2
G5	0*	0	0	2	1

- Új mátrix másolása a jelölések nélkül.
- Elem megjelölése *-al akkor,
  - ha láncban nem szereplő 0* volt,
  - ha láncban szereplő 0' volt.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

17.
1. lépés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*e	1	0	1	0’e
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	***0’e***	0	0	2	1

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	4	0*	0	1
G2	0	0*	0	0	1
G3	0	1	0	1	0*
G4	0	3	0	0*	2
G5	0*	0	0	2	1

- Van teljes nulla rendszer.
- I. fázis vége. Magyar módszer kész.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

18.
II.

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	4	0*	0	1
G2	0	0*	0	0	1
G3	0	1	0	1	0*
G4	0	3	0	0*	2
G5	0*	0	0	2	1

x_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	0	0	1	0	0
G2	0	1	0	0	0
G3	0	0	0	0	1
G4	0	0	0	1	0
G5	1	0	0	0	0

- Döntési változók értékének beállítása a redukált költségmátrix alapján:
  - a *-al jelölt elemek helyére 1
  - a többi elem helyére 0 kerül.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A példa megoldása

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	3	2	3
G2	3	2	4	3	4
G3	3	3	4	4	3
G4	2	4	3	2	4
G5	2	1	3	4	3

x_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	0	0	1	0	0
G2	0	1	0	0	0
G3	0	0	0	0	1
G4	0	0	0	1	0
G5	1	0	0	0	0

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}} = 3 + 2 + 3 + 2 + 2 = 12$$

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A Szállítási feladat megoldása

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A Szállítási feladat

- Adott meghatározott számú beszállító (source) a szállítható mennyiségekkel (transportation availability).
- Adott meghatározott számú rendeltetési hely (destination) az igényekkel (demand).
- Ismertek az egységnyi mennyiségre vonatkoztatott szállítási költségek.
- Készítsünk szállítási tervet minimális szállítási összköltséggel!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A Szállítási feladat matematikai modellje

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij} \rightarrow min$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = t_i \,(i = 1,2,...,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = d_j \,(j = 1,2,...,m)$$

$$x_{ij} >= 0 \,(i = 1,2,...,n;\, j = 1,2,...,m)$$

Kiegyenlített feladat esetén:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

- Jelölések:
  - n – források száma
  - m – a célhelyek száma
  - i – forrás index
  - t_i – az i forrás kapacitása
  - j – céhely index
  - d_j – a j. célhely igénye
  - c_{ij} – az i. forrástól a j. célhelyre szállított egységnyi mennyiség költsége
  - x_{ij} – döntési változó, a szállított mennyiség

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Példa n = 3, m = 4

c_{ij}	D1	D2	D3	D4	ti
S1	4	3	8	2	300
S2	7	5	9	3	300
S3	4	5	4	4	200
dj	200	200	300	100	800

Kiegyenlített feladat!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

A megoldás algoritmusa

Előkészítő rész

- 0. Egy lehetséges bázis-megoldás készítése

Iterációs rész:

- 1. Vizsgálat: optimális-e a megoldás?
- 2. A megoldás javítása

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

0. Előkészítés

- Többféle módszer lehetséges
- Pl. bal-felső sarok módszer
  - Felhasználjuk a szállítható mennyiségeket a sorokban, balról jobbra haladva a cellákon.
  - Kielégítjük az igényeket az oszlopokban, fentről lefelé haladva a cellákon.

Jobb-felső, bal-alsó, jobb-alsó sarokból is indulhatunk! Kiválasztjuk a legjobb kiindulási módszert, de nem kötelező. Bármelyik jó!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

1. Vizsgálat: optimális-e a megoldás?

- Ha n+m-1 <= r (r a kijelölt cellák száma), akkor nincs elfajulás:
  - Számítsuk ki a javulási indexeket (I_{ij})!
  - Ri legyen a i. sor és K_j legyen a j. oszlop indexe úgy, hogy $R_i + K_j = C_{ij}$ a kijelölt cellákra és egy ismeretlen szabadon választható pl. $R_1=0$
  - Az R_i és K_j indexek ismeretében határozzuk meg a javulási indexeket $I_{ij} = C_ij – R_i – K_j$ alapján
  - Ha minden I_{ij} >= 0 akkor a megoldás optimális!
  - Ha nem akkor folytassuk a 2. lépéssel.
- Elfajulás esetén használjunk 0-t egy megfelelő üres cella kitöltésére, és kezdjük újra a vizsgálatot.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

2. A megoldás javítása

- Készítsünk hurkot a legkisebb negatív értéktől indulva úgy, hogy a hurok többi eleme kiválasztott elem legyen.

  A hurok képzése során vegyük figyelembe, hogy:
  - az egymást követő cellák ugyanabban a sorban vagy ugyanabban az oszlopban helyezkedjenek el
  - ugyanabban a sorban vagy oszlopban ne legyen kettőnél több egymást követő cella
  - ez első és utolsó cella legyen azonos sorban vagy oszlopban
  - egy cella legfeljebb egyszer szerepelhet a hurokban
- A hurok mentén változtassuk meg a kijelölt értékeket úgy, hogy a lehető legnagyobb javulást érjük el a korlátozások betartása mellett.
  - Vegyünk fel egy segédváltozót (y) és a kiindulási cellához adjuk hozzá, majd a hurok mentén felváltva – és + előjellel adjuk hozzá az érintett cellákhoz.
  - Az y értékét azoknak a celláknak a legkisebb értéke határozza meg, amelyekben - előjellel szerepel az y.
- Folytassuk az 1. lépéssel!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Speciális esetek

- Kiegyenlített (balanced) feladat:

az igényelt mennyiségek összege egyenlő az elszállítható mennyiségek összegével:

$$\sum_{j=1}^{m} d_j = \sum_{i=1}^{n} t_i$$

- Kiegyenlítetlen (unbalanced) feladat:

1. az igényelt mennyiségek összege kisebb az elszállítható mennyiségek összegénél (túlkínálat):

$$\sum_{j=1}^{m} d_j < \sum_{i=1}^{n} t_i$$

2. az igényelt mennyiségek összege nagyobb az elszállítható mennyiségek összegénél (túlkereslet):

$$\sum_{j=1}^{m} d_j > \sum_{i=1}^{n} t_i$$

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Kiegyenlítetlen feladat megoldása túlkínálat esetén

- Transzformáljuk a kiegyenlítetlen feladatot kiegyenlített feladattá:

  Adjunk a célhelyekhez egy kiegészítő helyet

  – az igénye éppen a többlettel egyezzen meg,

  – a hozzá rendelt fajlagos költségek legyenek nullák.

- Oldjuk meg a kiegyenlített feladatot a tanult módszerrel!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Kiegyenlítetlen feladat megoldása túlkereslet esetén

- Transzformáljuk a kiegyenlítetlen feladatot kiegyenlített feladattá:

  Adjunk a forrásokhoz egy kiegészítő helyet

  – a szállítható mennyiség a hiánnyal egyezzen meg,

  – a hozzá rendelt fajlagos költségek legyenek nullák.

- Oldjuk meg a kiegyenlített feladatot a tanult módszerrel!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Szállítási tábla formalizmusa

	D1	K1	D2	K2	D3	K3	D4	K4	ti
S1		c11		c12		c13		c14	
R1	X11	I11	x12	I12	x13	I13	x14	I14	t1
S2		c21		c22		c23		c24	
R2	x21	I21	x22	I22	x23	I23	x24	I24	t2
S3		c31		c32		c33		c34	
R3	x31	I31	x32	I32	x33	I33	x34	I34	t3
dj	d1		d2		d3		d4		

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Szállítási tábla jelölései

- n = 3 a források száma
- m = 4 a célállomások száma
- S1, S2, S3 a források
- D1, D2, D3, D4 célállomások
- t1, t2, t3 a forrásokból elszállítható mennyiségek
- d1, d2, d3, d4 a célállomások szükséglete
- R1, R2, R3 a sorok árnyékköltségei
- K1, K2, K3, K4 az oszlopok árnyékköltségei
- I11, …, I34 a javulási indexek
- c11,…, c34 a fajlagos költségek
- x11, …, x34 a szállított mennyiségek (döntési változók)

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Példa kiegyenlített feladatra

	D1		D2		D3		D4		ti
S1		2		6		5		4	800
S2		5		7		4		3	700
S3		2		9		6		6	500
dj	200		300		500		1000		

- Kiinduló tábla felvétele.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

1.
0. Előkészítés:

	D1		D2		D3		D4		ti
S1		2		6		5		4	
	200		300		300				800
S2		5		7		4		3	
					200		500		700
S3		2		9		6		6	
							500		500
dj	200		300		500		1000		

- Bal-felső saroktól kiindulva, maximális szállítással kezdeti megoldás készítése.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

2.
1. Vizsgálat:

	D1	2	D2	6	D3	5	D4	4	ti
S1		2		6		5		4	
0	200		300		300				800
S2		5		7		4		3	
-1					200		500		700
S3		2		9		6		6	
2							500		500
dj	200		300		500		1000		

- A kijelölt cellák száma r = 6
- 6 >= 3+4-1 teljesül így nincs elfajulás
- Ri és Kj indexek számítása a kijelölt cellák mentén haladva: Kj = cij – Ri és Ri = cij - Kj

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

3.
1. Vizsgálat (folytatás):

	D1	2	D2	6	D3	5	D4	4	ti
S1		2		6		5		4	
0	200	0	300	0	300	0		0	800
S2		5		7		4		3	
-1		4		2	200	0	500	0	700
S3		2		9		6		6	
2		-2		1		-1	500	0	500
dj	200		300		500		1000		

- Javulási indexek számítása: Iij = cij - Ri - Kj
- Van nullánál kisebb érték, így a megoldás nem optimális.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

4.
2. Javítás:

	D1	2	D2	6	D3	5	D4	4	ti
S1		2		6		5		4	
0	200-y	0	300	0	300+y	0		0	800
S2		5		7		4		3	
-1		4		2	200-y	0	500+y	0	700
S3		2		9		6		6	
2	+y	-2		1		-1	500-y	0	500
dj	200		300		500		1000		

- Hurokképzés a (3,1) elemből kiindulva: (3,1); (1,1); (1,3); (2,3); (2,4); (3,4);
- A hurok elemeinek módosítása y-nal.
- y = min(200,200,500) = 200

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

5.
2. Javítás (folytatás):

	D1		D2		D3		D4		ti
S1		2		6		5		4	
	0		300		500				800
S2		5		7		4		3	
					0		700		700
S3		2		9		6		6	
	200						300		500
dj	200		300		500		1000		

- Szállítási mennyiségek módosítása az y behelyettesítésével.
- Az indexek törlése.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

6.
1. Vizsgálat:

	D1		D2		D3		D4		ti
S1		2		6		5		4	
			300		500				800
S2		5		7		4		3	
							700		700
S3		2		9		6		6	
	200						300		500
dj	200		300		500		1000		

- Elfajult eset, mert r = 5 és 3+4-1=6 így r>=n+m-1 nem teljesül!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

7.
1. Vizsgálat (folytatás):

	D1	2	D2	6	D3	5	D4	6	ti
S1		2		6		5		4	
0	0		300		500				800
S2		5		7		4		3	
-3							700		700
S3		2		9		6		6	
0	200						300		500
dj	200		300		500		1000		

- Az utosó javított tábla valamelyik nulláját pl. (1,1) meghagyjuk. Ekkor r = 6 így már nincs elfajulás.
- R1 = 0 szabadon választva.
- Ri és Kj számítása a kijelölt elemek mentén.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

8.
1. Vizsgálat (folytatás):

	D1	2	D2	6	D3	5	D4	6	ti
S1		2		6		5		4	
0	0	0	300	0	500	0		-2	800
S2		5		7		4		3	
-3		6		4		2	700	0	700
S3		2		9		6		6	
0	200	0		3		1	300	0	500
dj	200		300		500		1000		

- Javulási indexek számítása: Iij = cij - Ri - Kj
- Van nullánál kisebb érték, így a megoldás nem optimális.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

9.
2. Javítás:

	D1	2	D2	6	D3	5	D4	6	ti
S1		2		6		5		4	
0	0-y	0	300	0	500	0	+y	-2	800
S2		5		7		4		3	
-3		6		4		2	700	0	700
S3		2		9		6		6	
0	200+y	0		3		1	300-y	0	500
dj	200		300		500		1000		

- Hurokképzés az (1,4) elemből kiindulva: (1,4); (3,4); (3,1); (1,3)
- A hurok elemeinek módosítása y-nal.
- y = min(300,0) = 0

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

10.
2. Javítás (folytatás):

	D1		D2		D3		D4		ti
S1		2		6		5		4	
			300		500		0		800
S2		5		7		4		3	
							700		700
S3		2		9		6		6	
	200						300		500
dj	200		300		500		1000		

- Szállítási mennyiségek módosítása az y behelyettesítésével.
- Mivel y = 0, ezért csak átrendezés történt.
- Az indexek törlése.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

11.
1. Vizsgálat:

	D1	0	D2	6	D3	5	D4	4	ti
S1		2		6		5		4	
0		2	300	0	500	0	0	0	800
S2		5		7		4		3	
-1		6		2		0	700	0	700
S3		2		9		6		6	
2	200	0		1		-1	300	0	500
dj	200		300		500		1000		

- A nulla értékű szálítás nélkül elfajulás lenne, ezért megtartjuk.
- Ri és Kj számítása, majd Iij számítása.
- Nem optimális a megoldás!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

12.
2. Javítás:

	D1	0	D2	6	D3	5	D4	4	ti
S1		2		6		5		4	
0		2	300	0	500-y	0	0+y	0	800
S2		5		7		4		3	
-1		6		2		0	700	0	700
S3		2		9		6		6	
2	200	0		1	+y	-1	300-y	0	500
dj	200		300		500		1000		

- Hurokképzés: (3,3): (1,3); (1,4); (3,4);
- A hurok elemeinek módosítása y-nal.
- y = (500, 300) = 300

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

13.
2. Javítás (folytatás):

	D1		D2		D3		D4		ti
S1		2		6		5		4	
			300		200		300		800
S2		5		7		4		3	
							700		700
S3		2		9		6		6	
	200				300		0		500
dj	200		300		500		1000		

- Szállítási mennyiségek módosítása az y behelyettesítésével.
- Az indexek törlése.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

14.
1. Vizsgálat:

	D1	1	D2	6	D3	5	D4	4	ti
S1		2		6		5		4	
0			300		200		300		800
S2		5		7		4		3	
-1							700		700
S3		2		9		6		6	
1	200				300				500
dj	200		300		500		1000		

- Nincs elfajulás.
- Ri és Kj számítása.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

15.
1. Vizsgálat (folytatása):

	D1	1	D2	6	D3	5	D4	4	ti
S1		2		6		5		4	
0		1	300	0	200	0	300	0	800
S2		5		7		4		3	
-1		4		2		0	700	0	700
S3		2		9		6		6	
1	200	0		2	300	0		1	500
dj	200		300		500		1000		

- Javulási indexek számítása: Iij = cij - Ri - Kj
- Nincs nullánál kisebb érték, így a megoldás optimális!

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

16.
Eredmény:

	D1		D2		D3		D4		ti
S1		2		6		5		4	
			300		200		300		800
S2		5		7		4		3	
							700		700
S3		2		9		6		6	
	200				300				500
dj	200		300		500		1000		

A megoldást az x_{ij} szállított mennyiségek (döntési változók) mutatják. A szállítás összköltsége:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, x_{ij}$$

=6*300+5*200+4*300+3*700+2*200+6*300 = 8300

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Projektütemezési feladat megoldása

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Projektütemezés

- Projekt:
  - Egy nagy, összetett, általában egyedi igény alapján előállítandó termék vagy nyújtandó szolgáltatás előállítására/teljesítésére irányú törekvés, amely általában nagyszámú komponens feladat/aktivitás végrehajtását igényli.
- Projektütemezés:
  - Projekt(ek) időbeli végrehajtásának megtervezése úgy, hogy a megfogalmazott célok teljesüljenek figyelembe véve az előírt korlátozásokat.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Projektütemezés jellemzői

- Cél:
  - egy vagy többcélú optimalizálás,
  - amelyben sokféle szempont szerepelhet (pl. minőség, idő, költség, felhasználói elégedettség stb.).
- Feladatok/aktivitások hálózata alakul ki (pl. megelőzési relációk alapján).
- Korlátozottan/korlátlanul rendelkezésre álló erőforrásokat kell figyelembe venni.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Projekt példák

- Termelés
- Tervezés
- Kutatás/fejlesztés
- Menedzsment
- Építés
- Karbantartás, fenntartás
- Implementálás, telepítés
- stb.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Projektütemezés alapjai

- Projekt/projektek reprezentálása (precedencia gráfok)
- Modellek és megoldási módszerek
  - Kritikus útvonal módszer (egyszerű) (Critical Path Method, CPM)
  - Erőforrás korlátozott projektütemezés (bonyolult) (Resource-Constrained Project Scheduling, RCPS)
    - Prioritás/szabályalapú megoldási módszerek
    - Tudás-intenzív megoldási módszerek
  - Kiterjesztett modellek és módszerek (összetett)

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Projekt reprezentálása precedencia gráffal

„job on node" ábrázolás

Csomópont: feladat

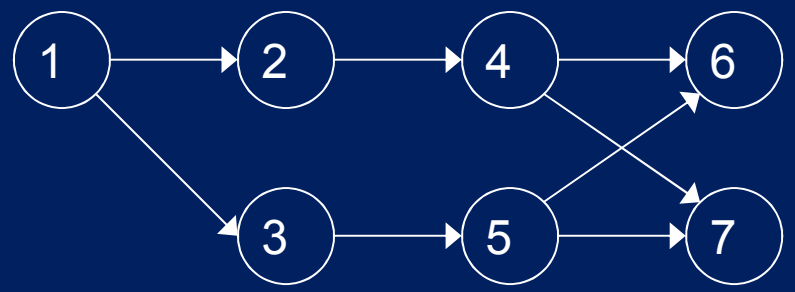
A csomópontok számozottak.

Irányított él: kötelező sorrendiség

Nincs irányított körút.

Nincs redundáns él.

Feladat	Végrehajtási idő [időegység]	Megelőző feladat(ok)
1	2	-
2	3	1
3	1	1
4	4	2
5	2	3
6	1	4, 5
7	3	4, 5



TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Projektütemezési feladat erőforráskorlátok nélkül

- Feltételezzük, hogy:
  - korlátlan erőforrások állnak rendelkezésre párhuzamosan.
  - adott *n* feladat megelőzési relációkkal.
  - minden egyes feladat p_j végrehajtási idejét ismertjük.
- Az ütemezés célja:
  - a projekt befejezési időpontjának (makespan) minimalizálása.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Projektütemezési feladat erőforráskorlátok nélkül

- A *j* feladat:
  - végrehajtási ideje: p_j
  - legkorábbi lehetséges kezdési időpontja: S_j'
  - legkorábbi lehetséges befejezési időpontja: C_j'
  - legkésőbbi megengedett befejezési időpontja: C_j''
  - időtartaléka: $\boxed{slack_j = C_j'' - p_j - S_j'}$
- Kritikus feladat: nincs tartaléka $\boxed{slack_j = 0}$
- Kritikus útvonal: kritikus feladatok láncolata.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Kritikus útvonal módszer (Critical Path Method, CPM)

- A CPM módszer két algoritmusból áll:
  - „Forward procedure”
  - „Backward procedure”

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Kritikus útvonal módszer (Critical Path Method, CPM)

- Előre haladó eljárás (Forward procedure):
  - Kezdeti időpontból indul, a precedencia gráfon végighaladva az irányított élek mentén kiszámítja minden feladat esetében a legkorábbi megengedett indítási és befejezési időpontot.
  - Az utolsónak elkészülő feladat adja meg a projekt befejezési időpontját.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Előre haladó eljárás (Forward procedure)

1. lépés:

Legyen $t = t_s$ (pl. $t_s = 0$ az indítás referencia időpontja).

A megelőző feladattal nem rendelkező minden egyes j feladat esetében legyen $S_j' = 0$ és $C_j' = p_j$.

2. lépés:

A megelőző feladattal rendelkező minden egyes *j* feladat esetében legyen induktív módon:

$$S_j' = \max_{all\ k \to j} C_k', \text{ és } C_j' = S_j' + p_j.$$

3. lépés:

A legkorábbi projektbefejezési időpont:

$$C_{max} = \max\{C_1', C_2', \ldots, C_n'\}$$

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Kritikus útvonal módszer (Critical Path Method, CPM)

- Visszafelé haladó eljárás (Backward procedure):
  - A projekt befejezési időpontjából indul, a precedencia gráfon az irányított élek mentén visszafelé haladva kiszámítja minden feladat esetében a legkésőbbi megengedett befejezési és indítási időpontot tekintettel arra, hogy a projektbefejezési határidő még tartható legyen.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Visszafelé haladó eljárás (Backward procedure)

1. lépés:

Legyen $t = C_{max}$

A rákövetkező feladattal nem rendelkező minden egyes j feladat esetében legyen

$C_j'' = C_{max}$ és $S_j'' = C_{max} - p_j$.

2. lépés:

A rákövetkező feladattal rendelkező minden egyes j feladat esetében legyen

$C_j'' = \min_{k \to all\, j} S_k''$, és $S_j'' = C_j'' - p_j$.

3. lépés:

Ellenőrizzük, hogy $t_s = \min\{S_1'', \ldots, S_n''\}$.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

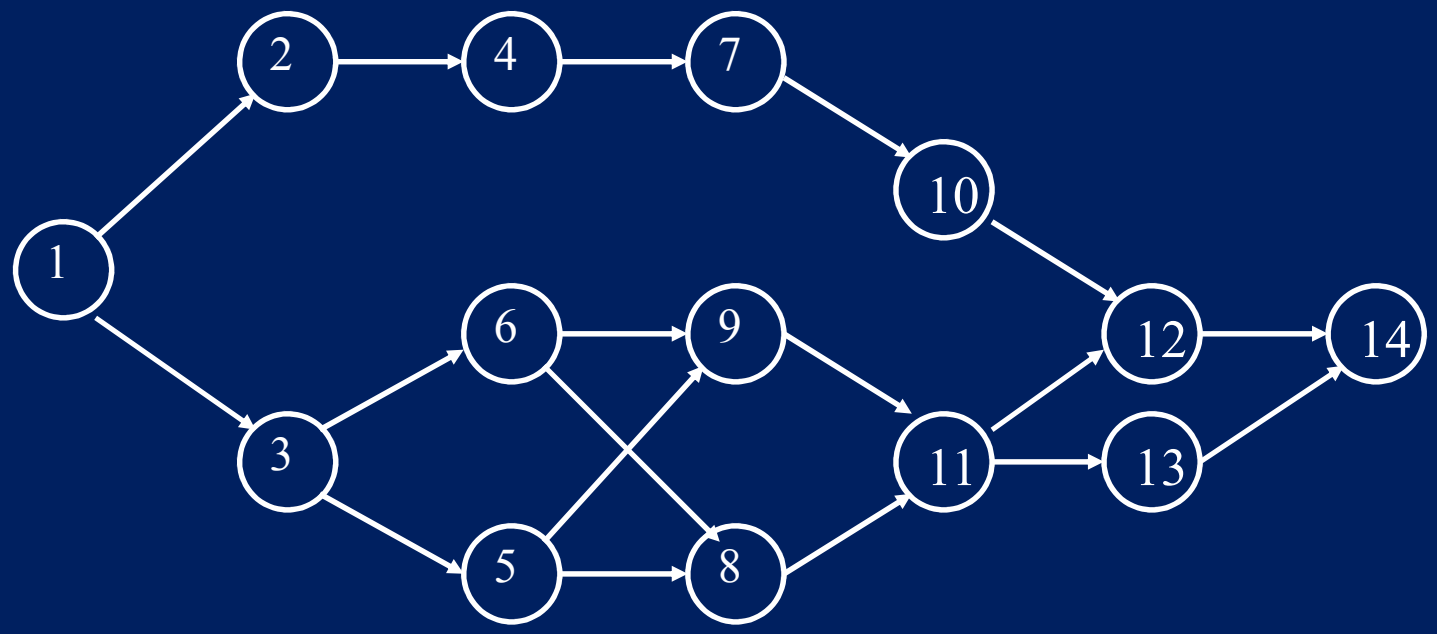
Magyarázat

- A *forward procedure* megadja az S_j' megengedett legkorábbi indítási időpontját minden feladatnak.
- A *backward procedure* megadja az S_j'' megengedett legkésőbbi indítási időpontját minden feladatnak.
- Ha ezek azonosak akkor a feladat kritikus.
- Ha ezek különbözőek akkor a feladatnak van tartaléka (**slack**).
- Kritikus útvonal (**critical path):**
  kritikus feladatok láncolata, amely a t_s kezdési időponttól a C_{max} befejezési időpontig vezet.
- Kritikus útvonalból egyszerre több is lehet, ezek akár részben fedhetik is egymást.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

CPM példa 1

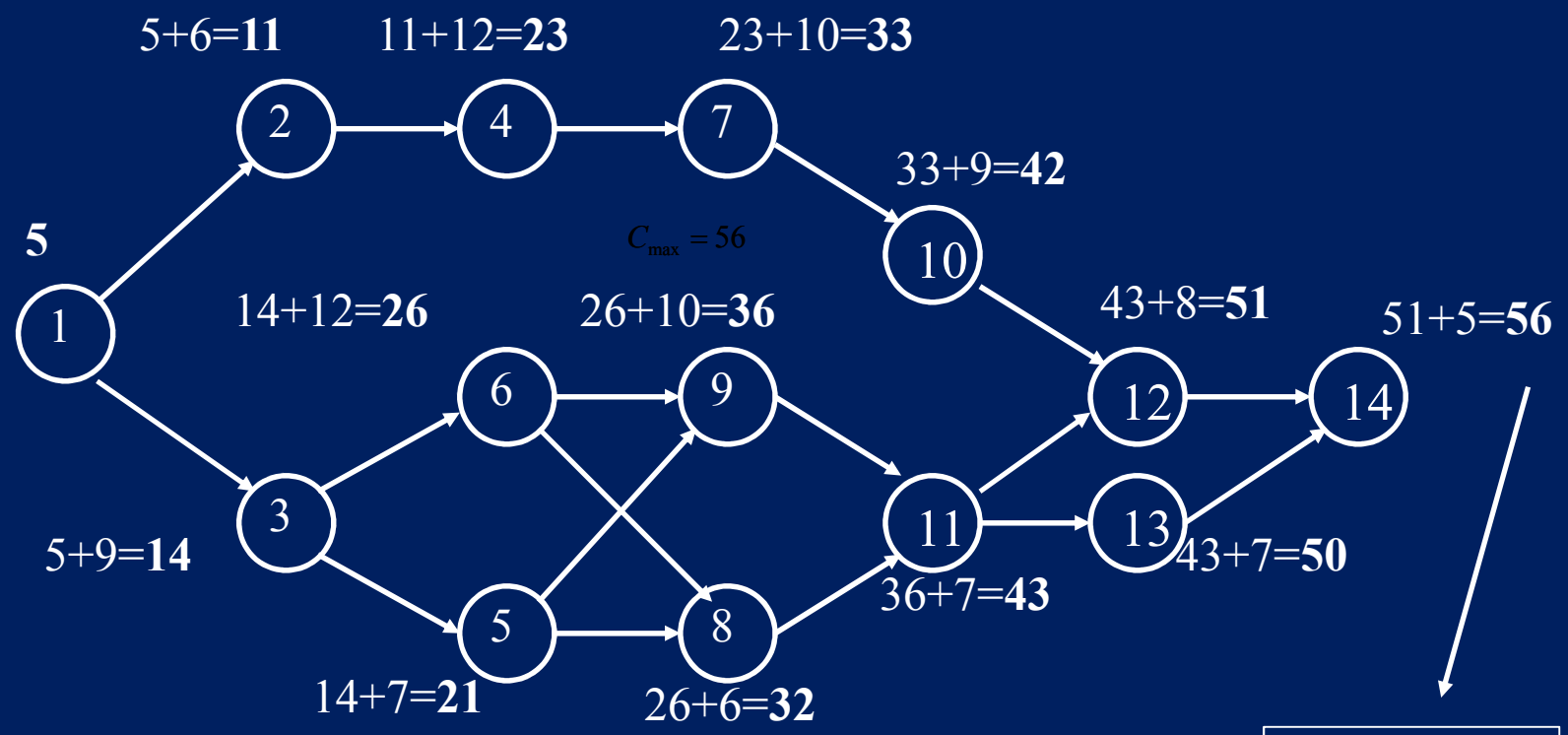
j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5



TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Forward Procedure példa 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5

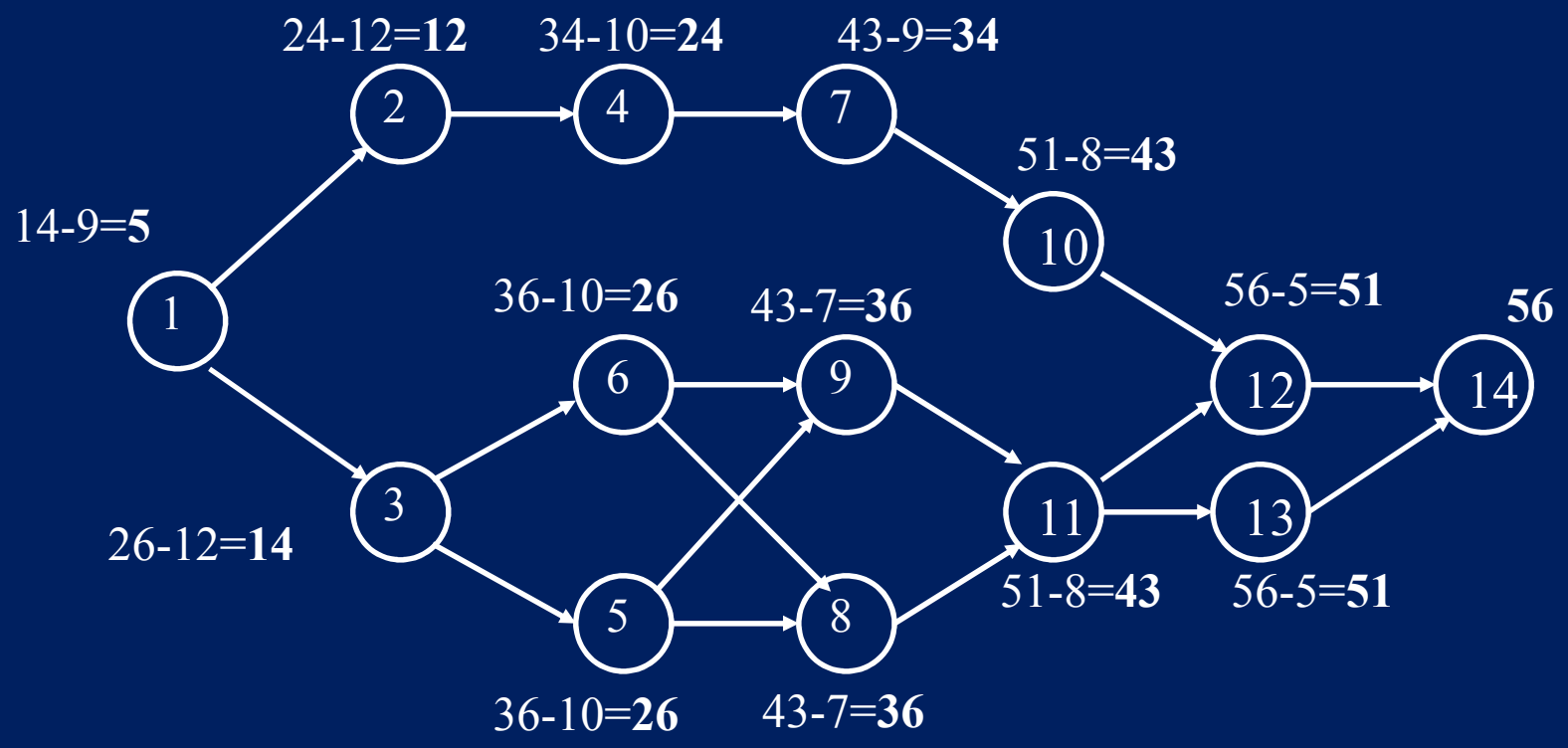


C_{max} = **56**

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

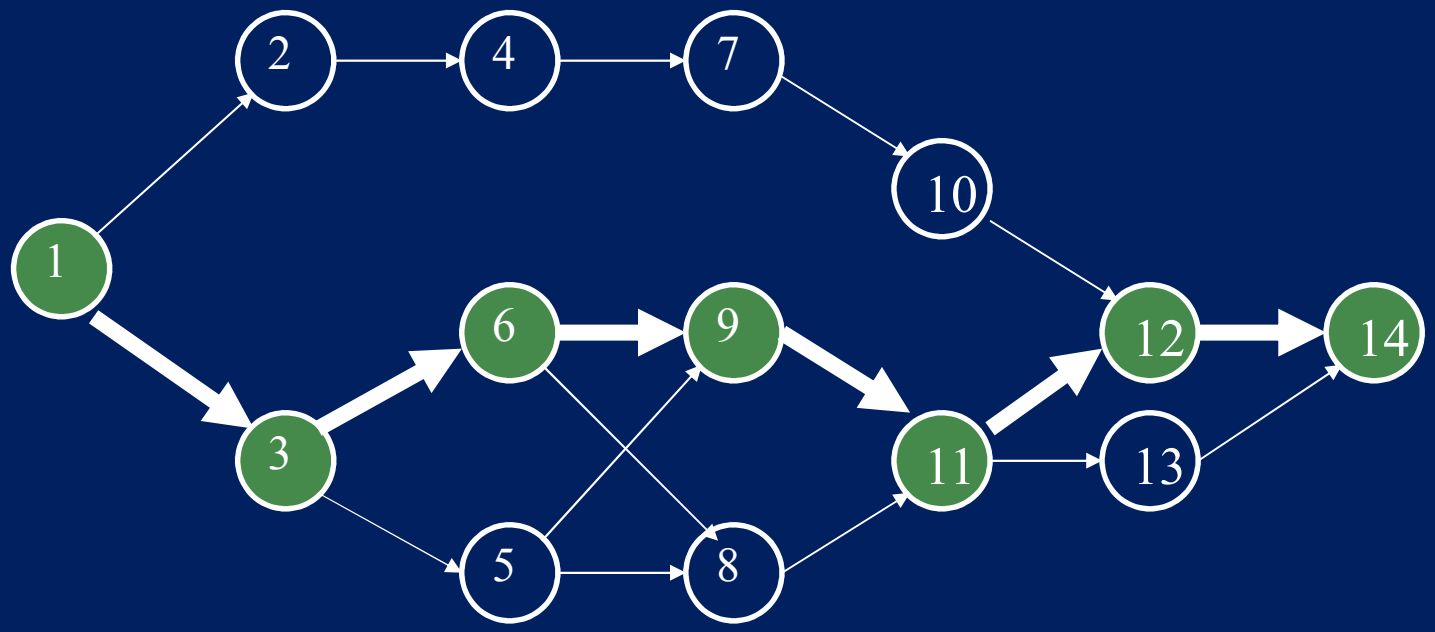
Backward Procedure példa 1

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
p_j	5	6	9	12	7	12	10	6	10	9	7	8	7	5



TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Critical Path példa 1

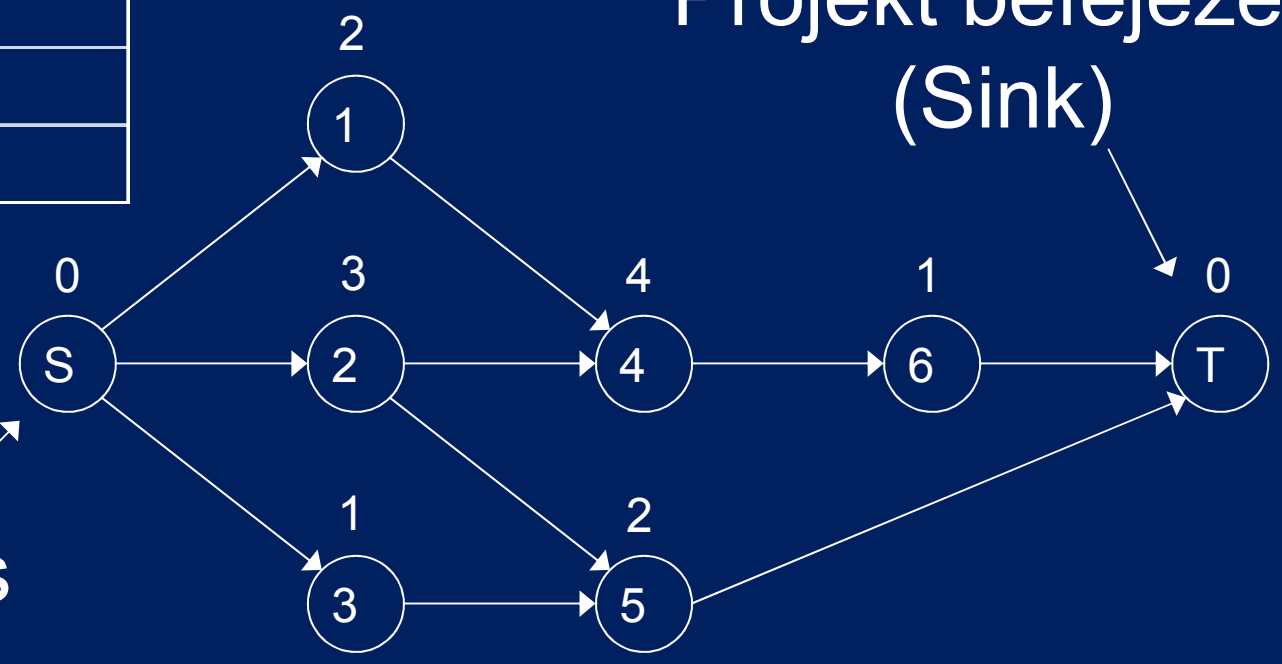


TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

CPM példa 2

Feladat Műveleti idő Megelőző feladat(ok)

Job	p(j)	Predecessors
1	2	-
2	3	-
3	1	-
4	4	1,2
5	2	2,3
6	1	4



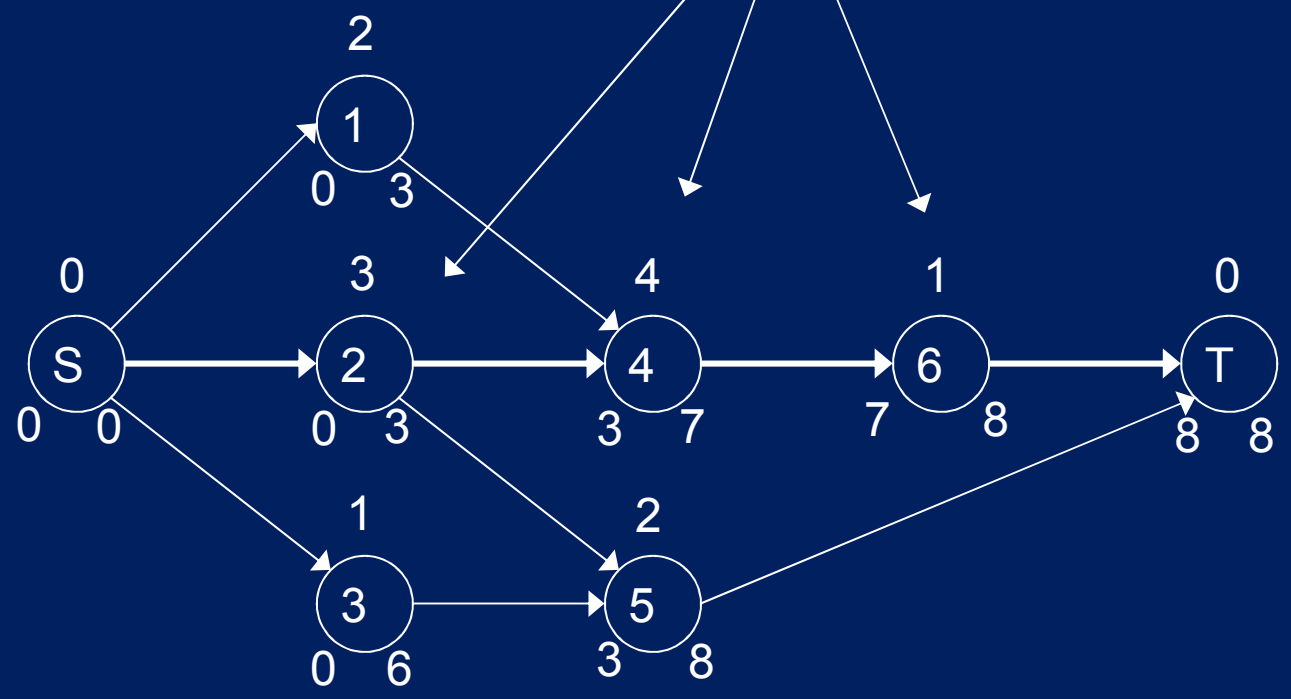
TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

CPM példa 2 (folyt.)

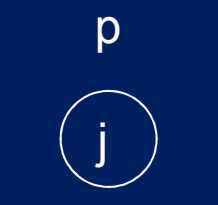
Job	p(j)	Predecessors	S'	C''
1	2	-	0	3
2	3	-	0	3
3	1	-	0	6
4	4	1,2	3	7
5	2	2,3	3	8
6	1	4	7	8

Kritikus feladat (Critical job):

$$S' + p = C' = C'' = S'' + p$$



Jelölés:



TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Termelésütemezési feladatok modellezése és megoldása

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési modellek

- Determinisztikus (Deterministic)
  - Az alapadatok előzetesen ismertek és pontos adatok.
- Sztochasztikus (Stochastic)
  - Bizonytalan adatok is szerepelnek (pl. műveleti idők szóródnak, munkák érkezési mintája pontosan nem ismert stb.).

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Termelésütemezési feladatok megoldása

1. A gyártási folyamatok vizsgálata, analízise
   - Műveletek, technológiai lépések, végrehajtási jellemzők, erőforrások, képességek, alternatívák, korlátozások
2. Az ütemezési feladatok modellezése
   - Erőforrás-környezet, operációk és kapcsolataik
   - Munkák (job) végrehajtási jellemzői és korlátozásai
   - Ütemezési célok (célfüggvények)
3. Hatékony megoldási módszerek kidolgozása
   - Algoritmusok, implementálás, értékelés
4. Alkalmazás
   - Szoftverfejlesztés, integráció, tesztelés
   - Telepítés, konfigurálás, betanítás

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési feladatok változatossága

Erőforrások, operációk szempontjából:

- Egygépes modell
- Párhuzamos gépek modelljei
  - P, Q, R
- Műhelymodellek
  - F, J, O, X, G
- Rugalmas modellek
  - FFS, FJS, …
- Kiterjesztett rugalmas modellek
  - EFFS, EFJS, …
- További modellek
  - PS, RCPS, MPM, MPT, …

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési feladatok változatossága

Munkák szempontjából:

- Műveletek megszakítása/felfüggesztése/újraindítása
- Munkák összevonása/szétbontása
- Intenzitások szerepe és jellege (állandók/változók)
- Rendelkezésre állások (korlátfeltételek/döntési változók)
- Indítási/befejezési korlátozások
- Gépátállítások
- Munkák közötti sorrendi korlátozások
- Logisztikai jellemzők, korlátozások
- Műveletek ismételt végrehajtása
- …

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési feladatok változatossága

Ütemezési célok szempontjából

- Minimalizálás
  - Költségek
  - Késések, csúszások
  - Befejezési időpontok
  - Átfutási idők, várakozási idők
  - Gépátállítások
  - Készletszintek, befejezetlen munkák
  - …
- Maximalizálás
  - Gépi és emberi erőforrások kihasználása
  - Áteresztőképesség, gyártási hatékonyság
  - …

A célfüggvények egymástól nem függetlenek kapcsolatrendszerük bonyolult, nehezen modellezhető komplex feladatok esetében.

Kompromisszumos kvázi-optimális végrehajtható megoldások gyors generálása.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési koncepciók alaptípusai

- Prediktív
  - előidejű döntési feladatok
  - a feladat részletei pontosan ismertek
  - Pl. gyártóműhely egy hetes gyártási ütemtervének elkészítése
- Reaktív
  - egyidejű döntési feladatok
  - a feladat részletei változhatnak (pl. a munkák menetközben is érkezhetnek)
  - Pl. rugalmas gyártórendszer on-line, real-time ütemezése

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Szabályalapú reaktív ütemezés

- Dinamikus ütemezés során minden aktuális döntési helyzetben és időpontban az indítható munkák (job-ok) közül ***ütemezési szabály*** alapján választ ki egyet (vagy többet) az ütemező rendszer, és azt (azokat) hajtja végre.
- Ütemezési szabály
  - Időfaktor szerint
    - Statikus szabály (időfüggetlen)
    - Dinamikus szabály (időfüggő)
  - Hatókör szerint
    - Lokális szabály (aktuális szituációra koncentrál)
    - Globális szabály (előretekint)

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési szabályok

- SPT (Shortest Processing Time)
  - A döntés időpontjában azt a job-ot kell kiválasztani a várakozó listából, amelyik a legkisebb technológiai terhelést adja a rendszernek. Tipikus változatok:
    - SIO (Shortest Imminent Operation time)
      - Az aktuálisan következő művelet szempontjából a legkisebb műveleti idejű munka kerül előre.
    - SRPT (Shortest Remaining Processing Time)
      - A job-ok hátrelévő műveleti időinek összege határozza meg az indítást.
- FRO (Fewest number of Remaining Operations)
  - A legkevesebb még hátralévő művelettel rendelkező job-ot választja.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési szabályok

- LPT (Longest Processing Time)
  - A döntés időpontjában azt a job-ot kell kiválasztani a várakozó listából, amelyik a legnagyobb technológiai terhelést adja a rendszernek. Tipikus változatok:
    - LIO (Longest Imminent Operation time)
      - Az aktuálisan következő művelet szempontjából a legnagyobb műveleti idejű munka kerül előre.
    - LRPT (Longest Remaining Processing Time)
      - A job-ok hátrelévő műveleti időinek összege határozza meg az indítást.
- LRO (Largest number of Remaining Operations)
  - A legtöbb még hátralévő művelettel rendelkező job-ot választja.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési szabályok

- FCFS (First Come First Served)
  - Érkezési sorrendben történik a job-ok kiválasztása (gépek várakozási sora alapján).
- FIFO (First In First Out)
  - A teljes rendszerre nézve a legkorábban érkezett job kerül kiválasztásra.
- ERD (Earliest Release Date)
  - A legkorábban indított (vagy indítható) job kerül kiválasztásra.
- EDD (Earliest Due Date)
  - A legkorábbi befejezési határidejű job kerül kiválasztásra.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési szabályok

- SSS (Smallest Static Slack)
  - A legkisebb gyártási időtartalékkal rendelkező job kerül kiválasztásra. ***Gyártási időtartalék*** = határidő – indítási időpont – műveleti idők összege.
- SDS (Smallest Dynamic Slack)
  - A legkisebb aktuális műveleti időtartalékkal rendelkező job kerül kiválasztásra.
    Aktuális időtartalék =
    határidő – aktuális időpont – hátralévő műveletek idejének összege.
- S/NO (Slack per Number of Operations)
  - aktuális időtartalék / műveletek száma
- S/RO (Slack per Remaining Operations)
  - aktuális időtartalék / hátralévő műveletek száma

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemezési szabályok

- CR (Critical Ratio)
  - A legkisebb kritikus rátával (CR) rendelkező job kerül kiválasztásra. ***CR*** = (határidő – aktuális időpont) / hátralévő műveletek idejének összege.
    - Ha CR = 1 a job kritikus.
    - Ha CR < 1 a job már késik.
    - Ha CR > 1 a job-nak van tartaléka.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

További ütemezési szabályok

- SIRO (Service In Random Order)
- SST (Shortest Setup Time)
- SQNO (Shortest Queue at the Next Operation)
- WSPT (Weighted Shortest Processing Time)
- …

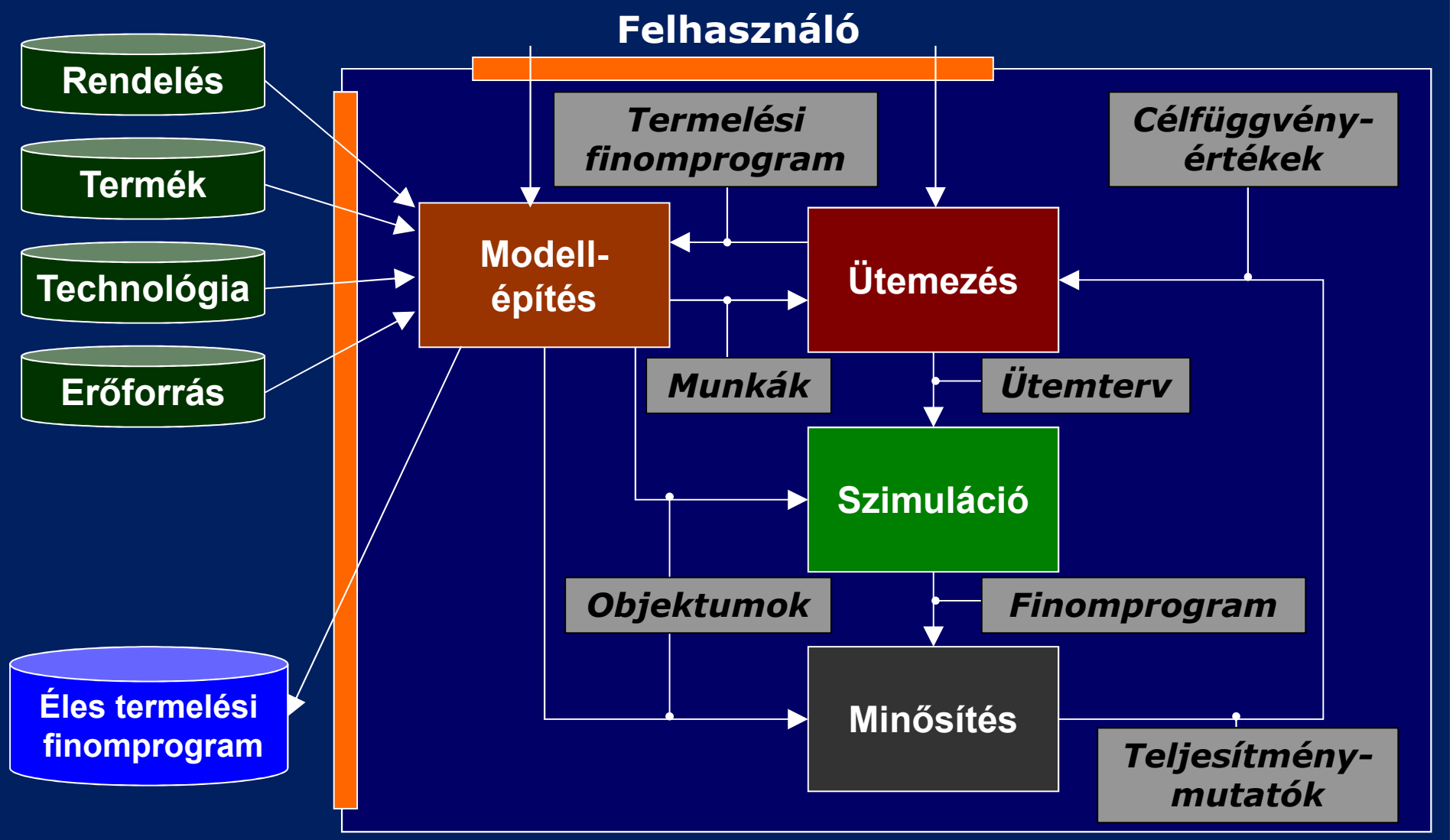
TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Kereső algoritmusra alapozott prediktív ütemezés

- Prediktív ütemezés során az ütemező rendszer ***ütemezési modell*** alapján hatékony keresési algoritmus és szimulációs kiértékelés kombinált alkalmazásával készíti el a munkák (job-ok) végrehajtási finomprogramját.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Megoldási koncepció

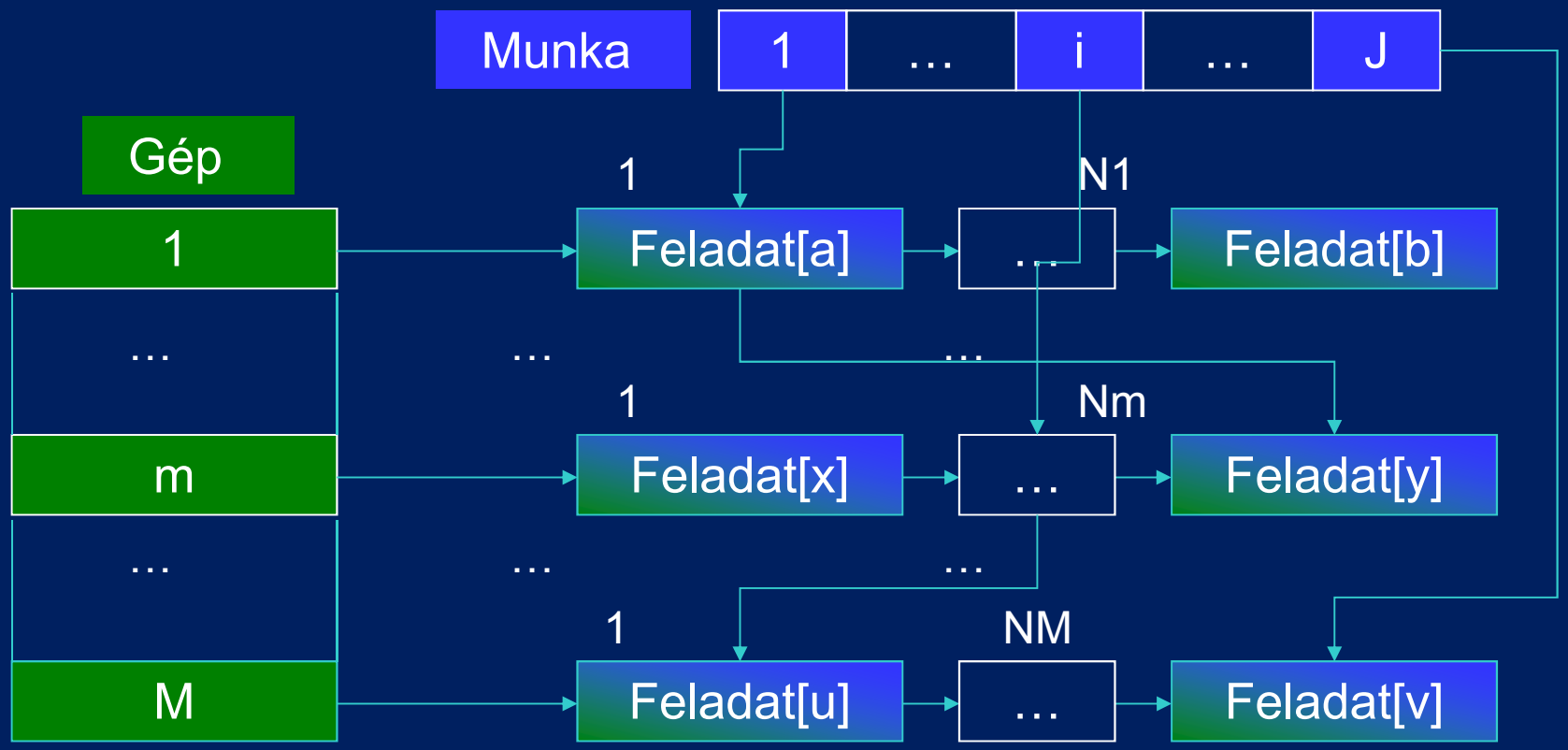


Ütemezés

- Integrált, általános célú ütemezési módszer a hozzárendelési és a sorrendi problémák megoldására, amely minden egyes munkához:
  - hozzárendel egy megfelelő útvonalat,
  - hozzárendel egy megfelelő gépet a kiválasztott útvonal minden egyes végrehajtási lépésének megfelelő gépcsoportból,
  - meghatározza minden hozzárendelt gépen a végrehajtási sorban elfoglalt pozícióját.
- További döntési változók (pl. szerszámok, műszakok, stb.)
- Kétfázisú heurisztikus megoldási módszer:
  - Heurisztikus felépítő algoritmus-változatok (inicializálás)
  - Heurisztikus kereső algoritmusok (iteratív javítás)

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Ütemterv



TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Szimuláció

Szimulációs modell kidolgozása:

- Koncepció megválasztása,
- Modell felépítése (részletes kidolgozás)
- Tesztelés, elemzés és értékelés.

Diszkrét esemény-vezérelt szimuláció alaptípusai:

- Munka-vezérelt (job-driven) működés,
- Erőforrás-vezérelt (resource-driven) működés.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Végrehajtás-vezérelt szimuláció

Speciális kombinációja a munka-vezérelt és az erőforrás-vezérelt szimulációnak.

- A munkák (job-ok) és a kapcsolódó objektumok passzív modell-komponensek.
- Az erőforrások (gépek, anyagmozgató eszközök stb.) aktív modell-komponensek.
- A szimuláció vezérlő logikája írja le, hogy a munkák és a munkadarabok ***végrehajtási lépései*** hogyan valósulnak meg az erőforrás-környezetben.
- Cél: a munkák időadatainak gyors kiszámítása.
- A kapcsolódó adatstruktúrák és manipulációk osztályokba szervezhetők objektum-orientált megközelítéssel.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Szimulációra alapozott problématér-transzformáció

A kiindulási problématér döntési változói:

- A munkákhoz rendelt gyártási feladatok
- A gyártási feladatok időadatai

Szimuláció

A transzformált problématér döntési változói:

- A munkákhoz rendelt gyártási feladatok
- A gyártási feladatok gépenkénti végrehajtási sorrendje
- A gépek műszakbeosztása

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Termelési finomprogramok minősítése, teljesítmény mutatók, célfüggvények

Minősítés

- Erőforrás mutatók
- Készletszint mutatók
- *Szállítókészség mutatók*

Munka *(i=1,…,n)*

D_i : határidő

R_i : indítási időpont

C_i : befejezési időpont

v_i : súlyozó tényezők

Eltérés: $L_i = C_i - D_i$

Csúszás: $T_i = \max(0, L_i)$

Átfutási idő: $F_i = C_i - R_i$

$\Big\} \; G_i$

- További mutatók …

γ : célfüggvény

néhány példa:

$$\gamma = \max_i (C_i)$$

$$\gamma = \max_i (C_i) - \min_i (R_i)$$

$$\gamma = \sum_i v_i G_i$$

$$\gamma = \max_i (v_i G_i)$$

$$\gamma = \frac{\sum_i v_i G_i}{n}$$

$$\gamma = |\{i \mid T_i > 0\}|$$

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Többcélú optimalizálás

- Döntési változók
- Korlátozások, feltételek
- Célfüggvények

Ütemezés

Szimuláció

Minősítés

$$f_k : S \rightarrow \Re^+ \cup \{0\}$$

$$f_k(s) \rightarrow min$$

$$s \in S, \forall k \in \{1,2,...,K\}$$

s egy megengedett megoldás

S a megengedett megoldások halmaza

f_k egy célfüggvény, K a célfüggvények száma

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Megoldás-változatok értékelésének matematikai modellje

$$s_x, s_y \in S \qquad a, b \in \Re$$

$$D : \Re^2 \to \Re \qquad D(a,b) = \begin{cases} 0, \; ha \; max(a,b) = 0 \\ \dfrac{b-a}{max(a,b)}, \; egyébként \end{cases}$$

$$w_k \in \Re \qquad w_k \geq 0 \qquad \forall k \in \{1, 2, \ldots, K\}$$

$$F : S^2 \to \Re \qquad F(s_x, s_y) = \sum_{k=1}^{K} (w_k \cdot D(f_k(s_x), f_k(s_y)))$$

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Megoldások minősítése többcélú kereső eljárásokban

Az $F(s_x, s_y)$ előjeles függvényérték kifejezi az s_y megoldás s_x megoldáshoz viszonyított relatív minőségét.

$$\left(s_y \; ? \; s_x\right) := \left(F(s_x, s_y) \; ? \; 0\right)$$

s_y jobb megoldás mint s_x ha $F(s_x, s_y) < 0$

s_y és s_x azonosan jó megoldások ha $F(s_x, s_y) = 0$

s_y rosszabb megoldás mint s_x ha $F(s_x, s_y) > 0$

Egycélú keresés ⇒ Többcélú keresés

- Tabu keresés (TS),
- Szimulált hűtés (SA),
- Genetikus algoritmus (GA)
- …

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

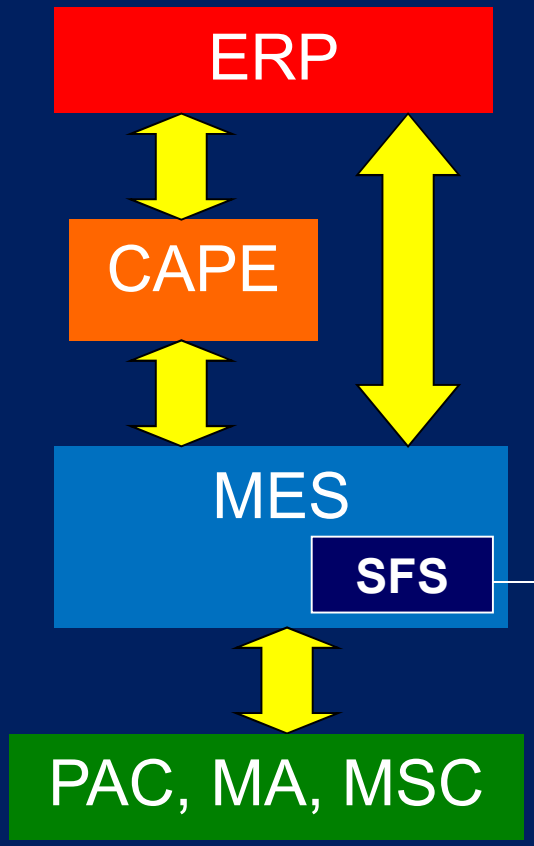
Gyakorlati feladatok megoldása

- A gyártásirányításhoz kapcsolódó ütemezési feladatok nagyon sokfélék lehetnek, melyek összetett, nehezen megoldható többcélú optimalizálási problémákhoz vezetnek.
- A korszerű tudás-intenzív keresési módszerek, a gyors végrehajtás-vezérelt szimuláció és a többcélú eredményértékelő módszerek hatékony támogatást nyújtanak.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Alkalmazási példa:

Termelésprogramozás (SFS)



SFS: Shop Floor Scheduling

Rövid távú, műhelyszintű ütemezés

Bemenet:

- Belső rendelések
- Termék adatok
- Technológiai adatok
- Erőforrás adatok
- Anyag és komponens adatok
- Ütemezési célok

Kimenet:

- Termelési finomprogram
  - Munkák és erőforrások összerendelése
  - Tervezett tevékenységek
  - Tervezett időadatok

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Alkalmazási példa:

Kereső algoritmusra alapozott prediktív ütemezés

- Extended Flexible Job Shop (EFJS)
  - Kiterjesztett (Extended)
    - Művelet (Operation, O)
    - Technológiai lépés (Technological Step, TS)
    - Végrehajtási lépés (Execution Step, ES)
    - Végrehajtási útvonal (Execution Route, ER)
    - Részletes modell (erőforrás-környezet, végrehajtási jellemzők, korlátozások)
  - Rugalmas (Flexible):
    - Adott feladat elvégzésére több gép is alkalmas
  - Többféle célfüggvény (Multi-Objective)

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Az ütemezési feladat formális leírása

$\alpha|\beta|\gamma$ formalizmus:

- α erőforrás-környezet
- β korlátozások, végrehajtási jellemzők
- γ célfüggvények

$$\alpha = \{ EFJSx, M_g, Q_{i,m,t}, Set_{i,j,m}, Cal_m, B_{b,p}, Tr_{m,n} \}$$

$$\beta = \{ r_i, D_i, Exe_i, A_{i,g}, To_{i,g} \}$$

$$\gamma = \{ f_1, f_2, \ldots, f_K \}$$

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

$$\alpha = \{EFJSx, M_g, Q_{i,m,t}, Set_{i,j,m}, Cal_m, B_{b,p}, Tr_{m,n}\}$$

EFJSx: a műveletek száma, típusa és sorrendje munkánként eltérő lehet.

M_g: gépcsoportok, gépcsoportokon belül párhuzamos gépek.

$Q_{i,m,t}$: a gépek munkáktól és szerszámoktól függő, eltérő termelési sebességekkel (intenzitásértékekkel) működhetnek.

$Set_{i,j,m}$: munkák sorrendjétől és géptől függő átállítási időadatok.

Cal_m: gépekre előírt rendelkezésre állási időintervallumok (pl. műszakbeosztás).

$B_{b,p}$: korlátozott méretű műveletközi tárolók, melyek kapacitása függ a terméktípusoktól.

$Tr_{m,n}$: gépek közötti anyagmozgatási idők.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

$$\beta = \{ r_i, D_i, Exe_i, A_{i,g}, To_{i,g} \}$$

r_i: munkánként előírható a legkorábbi indítási időpont (indításra vonatkozó időbeli korlátozás).

D_i: munkánként előírható a legkésőbbi befejezési időpont (a teljesítés határideje).

Exe_i: munkánként definiálható a végrehajtandó műveletek sorozata.

$A_{i,g}$: munkánként definiálható a műveletvégzésre alkalmas gépek halmaza gépcsoportonkénti bontásban.

$To_{i,g}$: munkánként definiálható a műveletvégzésre alkalmas szerszámok halmaza gépcsoportonkénti bontásban.

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

$$\gamma = \{ f_1, f_2, \ldots, f_K \}$$

Több célfüggvény egyszerre vehető figyelembe:

- Késések száma
- Legnagyobb késés [perc]
- Késések összege [perc]
- Átállások száma
- Átállások idejének összege [perc]
- Átlagos blokkoltság = (100 – átlagos gépkihasználtság) [%]
- Átlagos átfutási idő [perc]
- …

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Irodalomjegyzék

- ***Kulcsár Gy.:*** *Ütemezési modell és heurisztikus módszerek az igény szerinti tömeggyártás finomprogramozásának támogatására.* Doktori (PhD) értekezés, Miskolci Egyetem, p.146. 2007. http://ait.iit.uni-miskolc.hu/~kulcsar/ertekezes.htm
- ***Brucker P.:*** *Scheduling Algorithms.* Springer, ISBN 978-3-540-69515-8, (5nd ed.), 2007.
- ***Pinedo M. L.:*** *Planning and Scheduling in Manufacturing and Services.* Springer, ISBN 978-1-4419-0909-1, (2nd ed.), 2009.
- ***Imreh B. Imreh Cs.:*** *Kombinatorikus optimalizálás.* Novadat, ISBN 9639056367, 2005.
- *Transportation Problems (*Chapter1.pdf*)* http://www.pearsonschoolsandfecolleges.co.uk/Secondary/Mathematics/IB%20Resources/HeinemannModularMathematicsForEdexcelASAndALevel/Samples/Samplematerial/Chapter1.pdf

TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001

Köszönöm a megtisztelő figyelmet!

Dr. Kulcsár Gyula
Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Tanszék
kulcsar@ait.iit.uni-miskolc.hu
http://ait.iit.uni-miskolc.hu/~kulcsar

„Az oktatási segédlet a TÁMOP-4.2.1.B-10/2/KONV-2010-0001 jelű projekt részeként az Európai Unió támogatásával, az Európai Szociális Alap társfinanszírozásával készült."