A Hozzárendelési feladat megoldása Magyar-módszerrel

Virtuális vállalat

2013-2014/1. félév 3. gyakorlat

Dr. Kulcsár Gyula

A Hozzárendelési feladat

- Adott meghatározott számú gép és ugyanannyi független munka.
- Bármelyik gép bármelyik munkát képes elvégezni.
- Ismertek a gépek adott munkákra vonatkozó költségei.
- A feladat az, hogy minden géphez rendeljünk pontosan egy munkát úgy, hogy minden munka el legyen végezve és az összköltség minimális legyen.

A Hozzárendelési feladat matematikai modellje

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \rightarrow min$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} (i = 1,2,\ldots,n, j = 1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 (i = 1,2,\ldots,n)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1 (j = 1,2,\ldots,n)$$

- Jelölések:

  n – gépek (munkák) száma

  i – gép index

  j – munka index

  c_{ij} – az i. gép által végzett j. munka költsége

  x_{ij} – döntési változó

Példa n = 5

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	3	2	3
G2	3	2	4	3	4
G3	3	3	4	4	3
G4	2	4	3	2	4
G5	2	1	3	4	3

A példa megoldása

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	*3*	2	3
G2	3	*2*	4	3	4
G3	3	3	4	4	*3*
G4	2	0	3	*2*	4
G5	*2*	1	3	4	3

x_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	0	0	1	0	0
G2	0	1	0	0	0
G3	0	0	0	0	1
G4	0	0	0	1	0
G5	1	0	0	0	0

$$3 + 2 + 3 + 2 + 2 = 12$$

A megoldás menete

I. A költség mátrix szisztematikus átalakítása Magyar-módszerrel, független nulla rendszer kiválasztása.
II. A redukált költség mátrix független nulla rendszere alapján a döntési változók értékének beállítása.

A Magyar-módszer váza

Előkészítő rész

- 0. független nulla-rendszer képzése

Iterációs rész:

- 1. vizsgálat, oszloplekötés
- 2. szabad 0 keresése
- 3. vesszőzés, sorlekötés, oszlopfeloldás
- 4. láncképzés, átalakítás
- 5. redukálás

0. Előkészítés

- Minden sorból vonjuk ki az adott sor legkisebb elemét.
- Minden oszlopból vonjuk ki az adott oszlop legkisebb elemét.
- Oszlopfolytonosan alakítsunk ki független nulla-rendszert. (Az oszlopindexek szerint haladjunk végig növekvő sorrendben, mindig a legkisebb sorindexű nullát vegyük fel a rendszerbe (0*)! Minden sorban és oszlopban legfeljebb egy nulla legyen kiválasztva!)

1. Vizsgálat, oszloplekötés

- Ha a független nulla-rendszer elemeinek száma n akkor készen vagyunk. A 0* elemek mutatják az eredményt.
- Egyébként, kössük le a 0*-okat tartalmazó oszlopokat (az oszlop felé tegyünk + jelet)!
- Folytassuk a 2. lépéssel!

2. Szabad nulla keresése

- Keressünk sorfolytonosan szabad 0-át!

  (Szabad elem az, amelynek sem sora sem oszlopa nem kötött.)
  - Ha nincs akkor folytassuk az 5. lépéssel!
  - Ha van, akkor nézzük meg, hogy a sora tartalmaz-e 0*!
    - Ha tartalmaz akkor folytassuk a 3. lépéssel.
    - Egyébként folytassuk a 4. lépéssel!

3. Vesszőzés, sorlekötés, oszlopfeloldás

- A vizsgált szabad 0-t jelöljük meg vesszővel (0’)!
- Kössük le a sorát (tegyünk + jelet a sor elé)!
- Oldjuk fel a sorában lévő 0* oszlopát!
- Folytassuk a 2. lépéssel!

4. Láncképzés, átalakítás

- A vizsgált szabad 0-t jelöljük vesszővel (0’)!
- Képezzünk láncot az új 0’-től indulva úgy, hogy a 0’-t az oszlopában lévő 0* követi, a 0*-t a sorában lévő 0’ követi, ha nincs megfelelő elem véget ér a lánc. A lánc elemeit jelöljük e-vel (0’e vagy 0*e).
- Készítsünk új mátrixok: az aktuálisból másoljuk át a számokat jelölések nélkül! Majd azokat az elemeket jelöljük *-gal amelyre igaz az hogy:
  - Láncban nem szereplő 0* elem volt (0*) vagy
  - Láncban szereplő 0’ elem volt (0’e) legutóbb.
- Folytassuk az 1. lépéssel!

5. Redukálás

- Válasszuk ki a szabad elemek közül a legkisebbet (szemin)!
- Szemin-t vonjuk ki az összes szabad elemből!
- Szemint-t adjuk hozzá a kétszeresen kötött elemekhez! (Kétszeresen kötött elem: sora is és oszlopa is kötött.)
- Folytassuk a 2. lépéssel!

Példa

Kiindulási állapot:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	3	2	3
G2	3	2	4	3	4
G3	3	3	4	4	3
G4	2	4	3	2	4
G5	2	1	3	4	3

1.
0. Előkészítés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	*3*	2	3
G2	3	*2*	4	3	4
G3	3	3	4	4	*3*
G4	2	4	3	*2*	4
G5	*2*	1	3	4	3

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	1	0	1
G2	1	0	2	1	2
G3	0	0	1	1	0
G4	0	2	1	0	2
G5	1	0	2	3	2

Sorminimumok kivonása soronként.

2.
0. Előkészítés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	1	0	1
G2	1	0	2	1	2
G3	0	0	1	1	0
G4	0	2	1	0	2
G5	1	0	2	3	2

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	0	0	1
G2	1	0	1	1	2
G3	0	0	0	1	0
G4	0	2	0	0	2
G5	1	0	1	3	2

Oszlopminimumok kivonása oszloponként.

3.
0. Előkészítés:

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	0	0	1
G2	1	0	1	1	2
G3	0	0	0	1	0
G4	0	2	0	0	2
G5	1	0	1	3	2

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	0
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

Független nulla-rendszer kijelölése oszlopfolytonosan.

4.
1. lépés:

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	0
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1+	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	0
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Független nulla-rendszer kijelölése oszlop-folytonosan.
- Nincs teljes rendszer.
- 0* elemek oszlopainak lekötése.

5.
2. lépés:

C_{ij}	M1+	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	0
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1+	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	***0***
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Van a sorában 0*.

6.
3. lépés:

C_{ij}	M1+	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3	0*	0	0	1	***0***
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	***0'***
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- A talált szabad 0 megjelölése ‘-vel.
- 0’ sorának lekötése.
- 0' sorában lévő 0* oszlopának feloldása.

7.
2. lépés:

C_{ij}	M1	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4	0	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4	***0***	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Van a sorában 0*.

8.
3. lépés:

C_{ij}	M1	M2+	M3+	M4+	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4	***0***	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1	M2+	M3+	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	***0'***	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- A talált szabad 0 megjelölése ‘-vel.
- 0’ sorának lekötése.
- 0' sorában lévő 0* oszlopának feloldása.

9.
2. lépés:

C_{ij}	M1	M2+	M3+	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1	M2+	M3+	M4	M5
G1	2	3	0*	***0***	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Van a sorában 0*.

10.
3. lépés:

C_{ij}	M1	M2+	M3+	M4	M5
G1	2	3	0*	0	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	3	0*	***0’***	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- A talált szabad 0 megjelölése ‘-vel.
- 0’ sorának lekötése.
- 0' sorában lévő 0* oszlopának feloldása.

11.
2. lépés:

C_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	3	0*	0’	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	3	0*	0’	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Nincs.

12.
5. lépés:

C_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	3	0*	0’	1
G2	1	0*	1	1	2
G3+	0*	0	0	1	0'
G4+	0’	2	0	0*	2
G5	1	0	1	3	2

C_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2	0	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

- Szabad elemek minimumának kiválasztása: Szemin=c_{21}=1.
- Szemin kivonása a szabadelemekből.
- Szemin hozzáadása a kétszeresen lekötött elemekhez.

13.
2. lépés:

C_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2	0	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

C_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2	***0***	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Van a sorában 0*.

14.
3. lépés:

C_{ij}	M1	M2+	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2	0	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	***0'***	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

- A talált szabad 0 megjelölése ‘-vel.
- 0’ sorának lekötése.
- 0' sorában lévő 0* oszlopának feloldása.

15.
2. lépés:

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	***0***	0	0	2	1

- Szabad 0 keresése sorfolytonosan.
- Van.
- Nincs a sorában 0*.

16.
4. lépés:

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*	1	0	1	0'
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	0	0	0	2	1

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*e	1	0	1	0’e
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	***0’e***	0	0	2	1

- A talált szabad 0 megjelölése ’-vel.
- Innen indulva láncképzés.
- Minden 0'-t az oszlopában lévő 0* követ.
- Minden 0*-t a sorában lévő 0' követ.
- A lánc elemeit jelöljük e-vel.

16. (folytatás)
4. lépés:

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*e	1	0	1	0’e
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	***0’e***	0	0	2	1

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	4	0*	0	1
G2	0	0*	0	0	1
G3	0	1	0	1	0*
G4	0	3	0	0*	2
G5	0*	0	0	2	1

- Új mátrix másolása a jelölések nélkül.
- Elem megjelölése *-al akkor,
  - ha láncban nem szereplő 0* volt,
  - ha láncban szereplő 0' volt.

17.
1. lépés:

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1+	2	4	0*	0'	1
G2+	0’	0*	0	0	1
G3+	0*e	1	0	1	0’e
G4+	0'	3	0	0*	2
G5	***0’e***	0	0	2	1

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	4	0*	0	1
G2	0	0*	0	0	1
G3	0	1	0	1	0*
G4	0	3	0	0*	2
G5	0*	0	0	2	1

- Van teljes nulla rendszer.
- I. fázis vége. Magyar módszer kész.

18.
II.

C_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	2	4	0*	0	1
G2	0	0*	0	0	1
G3	0	1	0	1	0*
G4	0	3	0	0*	2
G5	0*	0	0	2	1

X_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	0	0	1	0	0
G2	0	1	0	0	0
G3	0	0	0	0	1
G4	0	0	0	1	0
G5	1	0	0	0	0

- Döntési változók értékének beállítása a redukált költségmátrix alapján:
  - a *-al jelölt elemek helyére 1
  - a többi elem helyére 0 kerül.

A példa megoldása

c_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	4	5	*3*	2	3
G2	3	*2*	4	3	4
G3	3	3	4	4	*3*
G4	2	4	3	*2*	4
G5	*2*	1	3	4	3

x_{ij}	M1	M2	M3	M4	M5
G1	0	0	1	0	0
G2	0	1	0	0	0
G3	0	0	0	0	1
G4	0	0	0	1	0
G5	1	0	0	0	0

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}} = 3 + 2 + 3 + 2 + 2 = 12$$

Köszönöm a figyelmet!

Dr. Kulcsár Gyula
Miskolci Egyetem Alkalmazott Informatikai Tanszék
kulcsar@ait.iit.uni-miskolc.hu
http://ait.iit.uni-miskolc.hu/~kulcsar